Math Club Outstanding Problems: 2005 September 11

Actually, not just outstanding problems; also one or two new ones.

1. A problem from Ray: show that if $a \mid b-1$ and $a \mid c-1$ then $a \mid bc-1$. (In fact any two of those statements implies the third.)

2. Express
$$\sum_k \binom{n}{3k}$$
in closed form as a function of n. (There's a hint in the notes for August 8.)

3. (U of Waterloo contest) Find all functions $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ with the property that
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \colon f(x+y) = f(x^2+y^2)\ .$$
(We noticed that constant functions have this property; I claimed that they are the only such functions.)

4. A problem I mentioned to Eileen once upon a time: Consider $M_2(\mathbb{Z})$, the set of 2×2 matrices with integer entries. It's easy to see that this set forms a ring under the usual matrix operations. What are the units of that ring?

5. (2005 IMO) Suppose x, y, and z are positive reals such that $xyz \geq 1$. Show that
$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2} + \frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq 0\ .$$

6. (2005 IMO) Given a convex quadrilateral $ABCD$ such that $BC = DA$ and BC is not parallel to DA. AC meets BD at P. E and F are variable points on BC and DA respectively such that $BE = DF$. EF meets BD at Q, and meet AC at R. Prove that the circumcircle of $\triangle PQR$ passes through a fixed point other than P.

7. (2005 IMO) A competition was held in which each contestant attempts to solve 6 problems. No contestant solved all 6. Every pair of problems was solved by more than $\frac{2}{5}$ of the contestants. Show that there are at least two contestants who solved exactly 5 of the problems. (A partial solution — showing there is at least *one* such contestant — appears in the notes for August 22.)

8. A new problem, in two parts.

   (a) Suppose $\sim$ is an equivalence relation on a set S. Let G be the set of invertible functions $f\colon S \to S$ with the property that

   $$\forall x \in S\colon x \sim f(x) .$$

   Show that G forms a group under function composition.

   (b) Suppose G is a group (under function composition) of functions on a set S. Define the relation $\sim$ on S by

   $$\forall x, y \in S\colon x \sim y \iff (\exists f \in G\colon x = f(y)) .$$

   Show that $\sim$ is an equivalence relation.

9. A new, open-ended problem: Can anything interesting be said about the solutions of the congruence

   $$k^2 \equiv k \pmod{n} ?$$

   For reference, the first few solutions are shown below.

1	0
2	0	1
3	0	1	·
4	0	1	·	·
5	0	1	·	·	·
6	0	1	·	3	4	·
7	0	1	·	·	·	·	·
8	0	1	·	·	·	·	·	·
9	0	1	·	·	·	·	·	·	·
10	0	1	·	·	·	5	6	·	·	·
11	0	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·
12	0	1	·	·	4	·	·	·	·	9	·	·
13	0	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
14	0	1	·	·	·	·	·	7	8	·	·	·	·	·
15	0	1	·	·	·	·	6	·	·	·	10	·	·	·	·
16	0	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
17	0	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
18	0	1	·	·	·	·	·	·	·	9	10	·	·	·	·	·	·	·
19	0	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
20	0	1	·	·	·	5	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·
21	0	1	·	·	·	·	·	7	·	·	·	·	·	·	·	15	·	·	·	·	·
22	0	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	11	12	·	·	·	·	·	·	·	·	·
23	0	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
24	0	1	·	·	·	·	·	·	·	9	·	·	·	·	·	·	16	·	·	·	·	·	·	·
25	0	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
26	0	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	13	14	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
27	0	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
28	0	1	·	·	·	·	·	·	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	21	·	·	·	·	·	·
29	0	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
30	0	1	·	·	·	·	6	·	·	·	10	·	·	·	·	15	16	·	·	·	·	21	·	·	·	25	·	·	·	·
31	0	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
32	0	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
33	0	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	12	·	·	·	·	·	·	·	·	·	22	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
34	0	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	17	18	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
35	0	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	15	·	·	·	·	·	21	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
36	0	1	·	·	·	·	·	·	·	9	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	28	·	·	·	·	·	·	·

Distinct solutions of $k^2 \equiv k \pmod{n}$